

REGINA MATEMATICII

Dumnezeu ajută teoria numerelor

JORDI DEULOFEU

Traducere de Ionela Polixenia Matei

CUPRINS

Capitolul 0

Gauss, prințul matematicienilor	9
Ce ar fi matematica fără conceptul de număr?	9
Gauss, prințul matematicienilor	13
Numere, mereu numere	17

Capitolul 1

Divizibilitatea și aritmetica claselor de resturi	21
Noțiuni și proprietăți elementare ale divizibilității	22
Cantitatea divizorilor unui număr și numere perfecte	22
<i>Problema</i>	23
Diferite familii de numere	26
Cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun, algoritmul lui Euclid	29
Congruențe: un concept fundamental	31
<i>Structuri algebrice: grup, inel, domeniu de integritate și corp</i>	34
Criterii de divizibilitate	35
<i>Un joc matematic</i>	37
Funcția și teorema lui Euler	39
Teorema chinezească a resturilor	41

Capitolul 2

Numerele prime	45
Infinitul numerelor prime și găurile dintre numere prime	46
Teorema fundamentală a aritmeticii	48
<i>Dirichlet și teoria numerelor</i>	50

Păstrăm infinitul în reducerea șirurilor de numere?	51
Câte numere prime există mai mici decât un număr întreg	53
<i>Despre ipoteza lui Riemann</i>	54
Teorema numerelor prime și funcția zeta a lui Riemann	56
Alte rezultate relevante cu privire la numerele prime	58
<i>Cea mai mare pereche de numere prime gemene</i>	60
<i>Yitang Zhang, un mare matematician chinez, contemporanul nostru</i>	62

Capitolul 3

Ecuatii diofantice și resturi pătratice	65
Ecuatii diofantice: concept general	66
Ecuatii diofantice liniare	67
<i>Marinarii, maimuța și nucile de cocos</i>	68
Dezvoltarea unui număr în fracție continuă	70
Ecuatiile diofantice de gradul doi și ecuația lui Pell	72
Tripletele pitagoreice	74
Ultima teoremă a lui Fermat	77
Alte ecuații diofantice speciale	84
<i>Srinivasa Ramanujan</i>	86
Resturi pătratice și de ordin superior	
Legea reciprocității pătratice	87
<i>Programul Langlands</i>	90

Capitolul 4

Șirul lui Fibonacci	93
O problemă de... înmulțire	94
<i>Leonardo din Pisa, cunoscut sub numele de Fibonacci</i>	96
Unele proprietăți ale șirului lui Fibonacci	98
<i>Paradoxul lui Hooper</i>	102

Relația dintre șirul lui Fibonacci și numărul de aur	104
<i>Numărul de aur</i>	106
Determinarea directă a termenilor șirului lui Fibonacci	108
Unde apare șirul lui Fibonacci?	109
<i>Jocul lui Wythoff</i>	110
Fibonacci din nou	113
<i>Édouard Lucas</i>	114

Capitolul 5

Diferite ramuri ale teoriei numerelor de astăzi	117
Teoria algebrică a numerelor	118
Teoria numerelor și combinatorica	121
Teoria aditivă a numerelor	123
<i>Paul Erdős, un matematician prolific și excentric</i>	126
Teoria numerelor și computerele	126
<i>Grupul GIMPS</i>	134
Lecturi recomandate	137

Capitolul 0

Gauss, prințul matematicienilor

*Dumnezeu a creat numerele naturale,
restul este opera omului.*
(L. Kronecker, 1823-1891)

Numerele naturale sunt unul dintre primele concepte ale matematicii și o parte importantă a acestei științe se bazează pe ele. Studiul numerelor, relațiile și operațiile dintre ele, este cunoscut sub numele de *aritmetică*. În prezent, însă, acest nume este rezervat pentru cea mai elementară parte a proprietăților numerelor, care este legată de noțiunile învățate pe băncile școlii și se distinge de problemele mai complexe legate de numerele întregi care constituie ceea ce este cunoscut astăzi drept „teoria numerelor”. Cu toate acestea, unii autori continuă să o numească „aritmetica înaltă” sau „aritmetica superioară”, denumiri utilizate pe termen lung.

Ce ar fi matematica fără conceptul de număr?

Fără îndoială, unul dintre conceptele principale ale matematicii este reprezentat de numere, deși matematica este mult mai mult decât atât. De fapt raționamentul matematic se bazează pe concepte diferite, precum formele spațiului, funcțiile sau probabilitatea.

Dar în matematică ideea de număr rămâne centrală. Ei bine, nu există un concept unic de număr: pornind de la cele denumite numere

întregi pozitive, cele care sunt folosite mai ales pentru a număra, există multe alte tipuri care s-au născut treptat de-a lungul istoriei în încercarea de a rezolva diferite probleme, atât străine matematicii, cât și intrinseci: cuantificare, ordine, codificare, distribuții, măsurare...

Primele dintre aceste numere se numesc „naturale” (sau „întregi pozitive”¹), apărute acum mulți ani, la început ca expresii ale ideii de cantitate a unei colecții discrete. Într-adevăr, primele semne scrise ale istoriei se referă la numărătoare, precum cele imprimate pe așa-numitul „os din Ishango”, descoperit în 1960 într-o zonă numită Ishango, lângă izvoarele Nilului. Datări recente sugerează că are o vechime de peste 20 000 de ani și, deși la început s-a crezut că semnele inscripționate erau simple înregistrări de calcule, astăzi se acceptă faptul că acestea pot conține unele operațiuni elementare (cum ar fi dublul și jumătatea) datorită aranjamentului creștăturilor imprimate. Prin urmare, nu există nicio îndoială că primele reprezentări ale numerelor naturale sunt, fără îndoială, cele mai vechi dintre câte concepte matematice pot fi reprezentate.

Va trebui să treacă câțiva ani înainte de a găsi elemente noi și va trebui să ne întoarcem la vechile civilizații babiloniene și egiptene pentru a găsi exemple ale faptului că utilizând numere naturale este posibilă rezolvarea multor probleme de cantitate, dar și de ordonare, sau de măsurare, chiar dacă se știe că, în general, atât numerele naturale, cât și cele raționale nu sunt suficiente pentru a exprima o măsură.

Pornind de la numere întregi pozitive este posibilă crearea raționalelor pozitive, reprezentate prin intermediul fracțiilor. Numerele raționale permit efectuarea oricărei distribuții (în cadrul matematicii, rezolvarea oricărei împărțiri), dar crearea lor a fost dificilă, inițial incompletă și diferită în funcție de civilizație: fracții sexagesimale în Babilon, reprezentare indusă de sistem în baza 60 folosită de babilonieni; fracții unitare în civilizația egipteană veche, adică fracții sub

¹ În terminologia matematică anglo-saxonă termenul *pozitiv* înseamnă *strict pozitiv*. În cea de origine franceză, cum e în limba română, zero este număr natural pozitiv.

forma $1/n$, unde n este un număr întreg pozitiv, care în timp vor deveni o parte semnificativă a teoriei numerelor.

Putem atribui pitagoreicilor conceptul general de fracție (sau număr rațional pozitiv) și, în general, grecilor antici dezvoltarea sa. Ei au descoperit că astfel de numere nu au rezolvat problema măsurii (dată fiind o mărime, exprimați prin intermediul unui număr de câte ori aceasta este conținută într-o alta considerată ca unitate) și au ridicat problema incommensurabilității, rezolvată prin construirea altor numere, cele iraționale. Această descoperire a provocat prima mare criză din istoria matematicii, numită „a incommensurabilelor” sau chiar „a iraționalelor”, care a subminat maxima pitagoreică conform căreia „totul este număr” (conceptul numerelor se referă la cele naturale și la cele deduse din ele), deoarece nici măcar măsurarea nu putea fi făcută mereu prin intermediul acestora, decât într-un mod aproximativ.

A fost nevoie de mulți ani (până în secolul al V-lea) pentru ca în India să fie create numerele întregi (formate din pozitive, 0 și negative) și aritmetica lor, în timp ce un sistem de numerotare zecimală pozițională a luat naștere în același timp, ce a durat aproximativ șapte secole pentru a ajunge în Occident, datorită lui **Leonardo din Pisa** (1175-cca.1250), cunoscut mai bine sub numele de Fibonacci (care l-a expus în celebra sa carte, *Liber Abaci*, datată 1202), după ce a trecut de arabi, inițiatorii algebrei.

De-a lungul anilor au apărut alte numere, cum ar fi cele imaginare (răspândite în rândul italienilor din secolul al XVI-lea care au studiat algebra), care permit generarea de numere complexe, dar este interesant de observat că va fi doar la începutul secolului XX, când, datorită matematicianului italian **Giuseppe Peano** (1858-1932), se va putea stabili o axiomatică definitivă pentru numerele întregi pozitive, primele numere din matematică, create și utilizate de peste cinci mii de ani, dar a căror definiție riguroasă nu este mai veche decât ceva mai mult de un secol.

Deși extensiile conceptului de număr merg mai departe, în această primă scurtă prezentare generală ne vom concentra tocmai pe acest

concept, deoarece subiectul de interes al nostru este teoria numerelor, care se ocupă cu numerele întregi și proprietățile lor, chiar dacă în demersul nostru va trebui să ne folosim de toate tipurile diferite de numere create de matematică, așa cum vom vedea pe parcursul cărții.

Analizând istoria oricărei ramuri a matematicii există un consens cu privire la care au fost momentele și lucrările-cheie pentru dezvoltarea acesteia, dar rareori se vede faptul că o lucrare se poate remarcă, fără îndoială, peste celelalte. Și totuși, acesta este cazul pentru *Disquisitiones Arithmeticae*, pe care tânărul Carl Friedrich Gauss a scris-o în 1798 și a publicat-o în 1801. Așa că am ales ca titlu al acestei cărți celebra idee a lui Gauss că, dacă matematica este regina științelor, teoria numerelor este regina matematicii.

Cum de munca unui matematician merită un loc de frunte printre toate cele dezvoltate pe parcursul istoriei? Răspunsul poate duce la diferite motive, dar fundamental există două care fac ca un matematician și ansamblul operei sale să intre pe lista celor mai buni. În primul rând, geniul contribuțiilor aduse, pe care l-a însemnat lucrarea, precum și extinderea, respectiv capacitatea creatoare și progresele. În al doilea rând, impactul lucrării asupra unei anumite comunități științifice, pe termen scurt sau lung.

Opera lui Gauss merită, fără îndoială, să fie considerată printre cele mai bune din cele două motive menționate: propune conjecturi interesante, aduce noi dovezi, introduce concepte importante și oferă idei pentru relaționarea teoriei numerelor, pe care el încă o numește „aritmetică”, cu alte ramuri ale matematicii. Dar, în plus, el propune un compendiu al principalelor rezultate deja cunoscute, revizuiește și îmbunătățește demonstrațiile altor matematicieni, introduce notații eficiente și, în cele din urmă, oferă atât de mult o structură cunoștințelor despre teoria numerelor încât nu este o exagerare să afirmăm că, atât din *Disquisitiones*, cât și din teoria numerelor, până în acel moment un compendiu de probleme relevante, dar nestructurate, devine o parte organizată a matematicii.

Gauss, printul matematicienilor

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a fost unul dintre cei mai distinși matematicieni din istorie și a adus contribuții foarte importante în analiza matematică, geometria diferențială, statistică, algebră, precum și în geodezie, magnetism și optică. Dar poate cea mai importantă contribuție a sa se referă la teoria numerelor. În special, lucrarea sa din tinerețe, *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), publicată la Leipzig, reprezintă una dintre cele mai importante cărți scrise în această ramură a matematicii, așa cum am menționat deja.

Gauss s-a născut în Brunswick, în Germania de astăzi, într-o familie umilă și a arătat în puțin timp un mare talent pentru matematică: conform unei celebre anecdote, a reușit să adune primele 100 de numere în câteva minute, descoperind și aplicând formula pentru suma termenilor unei progresii aritmetice. Profesorii săi l-au recomandat ducelui de Brunswick, iar acesta i-a finanțat studiile liceale și superioare la Universitatea din Göttingen, unde în 1799 și-a obținut doctoratul cu o teză despre teorema fundamentală a algebrei și demonstrarea acesteia.

În 1807, a devenit profesor de astronomie la Observatorul din Göttingen, unde a rămas pe tot parcursul vieții. În acei ani, Gauss și-a desăvârșit ideile despre geometria neeuclidiană, însă nu a reușit să publice concluziile. În jurul anului 1820, ocupat cu studii de geodezie, a creat câteva instrumente pentru tratarea datelor empirice, printre care curba de distribuție a erorilor care îi poartă numele, cunoscută și sub numele de „distribuție normală”, unul dintre pilonii statisticii.

Ideile sale privind studiul caracteristicilor suprafețelor curbate, expuse în *Dispozițiile generale despre suprafețele curbate* (1828), au pus bazele geometriei diferențiale moderne. El a fost, de asemenea, interesat de magnetism și a dezvoltat principiile matematice ale potențialului (1840). În fizică, Gauss s-a ocupat și de mecanică, acustică și, mai ales, de optică, context în care a publicat tratatul *Dioptrische Untersuchungen* (Investigații dioptrice, 1841) dovedind că

orice sistem de lentile este întotdeauna reductibil la o singură lentilă. Gauss, care a murit în Göttingen, orașul în care și-a petrecut aproape toți anii de maturitate, a fost un om de știință a cărui profunzime de analiză, varietate a intereselor și rigoare în abordare, l-au făcut să merite epitetul de „prințului matematicienilor”.

Deși pe parcursul cărții noastre ne vom referi la lucrarea sa despre teoria numerelor (de exemplu, vorbind despre congruență, unde a stabilit notația folosită astăzi), aici vrem să enumerăm pe scurt principalele contribuții ale lucrării sale *Disquisitiones Arithmeticae*. În ceea ce privește conținutul său, Gauss însuși declară că studiile prezente în volum aparțin părții de matematică care se ocupă în special de numere întregi, uneori cu fracții, dar care, în orice caz, exclude iraționalele.

Lucrarea este împărțită în șapte părți și prezentăm mai jos principalele rezultate:

- *Secțiunea I. Despre numerele congruente.* În ciuda conciziei sale, introduce un nou concept și notația corespunzătoare, congruențele, de cea mai mare importanță pentru dezvoltarea teoriei numerelor. La sfârșitul secțiunii demonstrează compatibilitatea congruențelor față de operațiile de sumă și produs, adică au o structură inelară.
- *Secțiunea II. Despre congruențele de gradul unu.* Plecând de la demonstrarea rezultatelor deja cunoscute, cum ar fi teorema descompunerii în produsul factorilor Gauss deduce noi rezultate precum cele referitoare la soluția congruențelor liniare, arătând că metodele atribuite lui **Leonhard Euler** (1707-1783) și **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) conduc la același algoritm. De asemenea, tratează lema chineză a resturilor, fără a o face explicită, precum și sistemele de congruențe de gradul întâi cu diferite necunoscute. Secțiunea se încheie cu diferite rezultate, cum ar fi proprietățile funcției indicatoare a lui Euler, pentru care consolidează notația curentă și așa-numita „teoremă a lui

Lagrange": o congruență polinomială modulo p , unde p este prim, nu poate avea mai multe rădăcini decât gradul său.

- *Secțiunea III. Despre resturile de puteri.* Se ocupă exhaustiv de studiul progresiilor geometrice modulo un număr prim. Se ocupă de mica teoremă a lui Fermat, a cărei primă demonstrație i-o atribuie lui Euler și analizează problema aflării exacte a numărului de resturi modulare ce au un ordin multiplicativ dat, cu ajutorul funcției indicator a lui Euler. Se ocupă de rădăcinile resturilor distincte ale unității, precum și de posibilitatea de a decide în mod eficient numărul lor. Gauss afirmă că „marea majoritate a metodelor utile pentru găsirea rădăcinilor primitive se bazează în principal pe numărare”. El propune o generalizare a teoremei lui Wilson și abordează sume geometrice și sume de rădăcini primitive. În cele din urmă, se ocupă din nou de rădăcinile unității și oferă un criteriu pentru existența rădăcinilor primitive.
- *Secțiunea IV. Despre congruențele de gradul doi.* Începe cu analiza resturilor pătratice modulo un număr prim -și apoi cu cea a resturilor modulo un număr compus. Apoi, continuă să vorbească despre analiza unei întrebări fundamentale pentru resturile pătratice: dat fiind un număr întreg, pentru ce modulo acesta se dovedește a fi un rest pătratic? Ia în considerare cazurile 1, 2, 3, 5 și opusele lor și încheie afirmând teorema: „Orice număr care, în modul, este rest (sau non-rest) modulo p va avea $+p$ sau $-p$ ca rest (sau non-rest), depinzând dacă p are forma $4n + 1$ sau $4n + 3$ ”. În această primă secțiune apare legea reciprocității pătratice și este furnizată prima demonstrație a acestui rezultat important. Gauss creează un algoritm pentru a determina dacă un număr este rest pătratic pentru un modul dat, începând de la descompunerea în produs de numere prime.
- *Secțiunea V. Despre forme și ecuații nedeterminate de gradul doi.* El începe de la studiul formelor pătratice întregi cu două necunoscute. Oferă o condiție necesară pentru ca discriminantul unei forme pătratice (definită ca „determinant”) să corespundă

unui număr întreg dat. Restul secțiunii este dedicat diferitelor proprietăți ale formelor pătrate.

Secțiunile VI și VII sunt mai abstracte decât precedentele și mai puțin importante pentru o viziune generală a teoriei numerelor din acea vreme. Mai târziu, Gauss a întocmit o a opta secțiune, publicată postum.

Dincolo de numeroasele și remarcabilele rezultate ale operei lui Gauss, valoarea sa constă în caracterul unificator, atât de mult încât se poate spune că *Disquisitiones* constituie prima lucrare generală a teoriei numerelor. De fapt, aici Gauss combină munca predecesorilor săi cu cea personală, în care îmbunătățește demonstrațiile, introduce altele noi, corectează erorile și reunește totul într-un singur context, extinzându-și în același timp câmpul de acțiune creând o legătură între teoria numerelor și alte domenii ale matematicii. De asemenea, trebuie remarcat faptul că structura expozițională a acestei lucrări (teoreme, demonstrații, corolari, fără a uita când sunt necesare exemplele numerice) a devenit modelul de urmat pentru textele ulterioare.

În același timp, *Disquisitiones* reprezintă un punct de plecare pentru alți iluștri matematicieni ai secolului al XIX-lea, precum Kummer, Dirichlet sau Dedekind. Datorită complexității și profunzimii multor comentarii făcute de Gauss în această lucrare, acestea nu au putut fi pe deplin înțelese de contemporanii săi, de fapt în unele cazuri au reprezentat sămânța ce a dat naștere unor relații noi și prolifice între teoria numerelor și alte ramuri ale matematicii, cum ar fi cazul funcțiilor L.



Numere, mereu numere

*Matematica este regina științelor,
iar teoria numerelor este regina matematicii.*
(C.F. Gauss, 1777-1855)

Studiul numerelor și în special al numerelor întregi este una dintre părțile matematicii, poate cea mai autentică, care a început cu nașterea acestei științe și care rămâne în prezent o ramură dintre cele mai complexe, cu multe probleme deschise și capabile să genereze constant noi provocări și presupuneri care uneori sunt greu de demonstrat.

Poate că singura diferență dintre imensul bagaj oferit de istorie și actualitate se bazează pe faptul că, timp de mii de ani, studiul numerelor întregi, sub denumirea de „aritmetică superioară”, mai întâi, și „teoria numerelor”, mai apoi, s-a dezvoltat apoi pentru a aprofunda cunoașterea numerelor, proprietăților și relațiilor lor, fără cel mai mic indiciu al aplicării la problemele realității străine matematicii. Pe de altă parte, în prezent, unele dintre aceste proprietăți au găsit aplicații importante, atât în criptografie, cât și în teoria computațională. Cu aceasta, afirmația lui **Nikolai Ivanovici Lobacevski** (1792-1856), că fiecare rezultat matematic important își va găsi într-o bună zi aplicarea în soluționarea unei probleme-cheie în afara disciplinei, este încă o dată adevărată.

Această carte își propune să ofere o imagine de ansamblu asupra teoriei numerelor și a dezvoltării acesteia de la început până în prezent, așa că am ales să combinăm referințele istorice și dezvoltarea în limbajul modern a principalelor concepte și rezultate ale acestei ramuri a matematicii. Este împărțită în șase capitole, unde primul și ultimul urmează un fir cronologic. Cele patru capitole centrale sunt dedicate celor patru dintre temele-cheie ale teoriei numerelor: relații de divizibilitate și congruențe în capitolul doi, numere prime în capitolul trei, ecuații diofantice în capitolul patru și șirul lui Fibonacci în capitolul cinci.

Nu ne prefacem că realizăm aici o expunere exhaustivă, ceea ce este imposibil într-o lucrare de acest gen, dar vom încerca să explicăm

care este probabil principala caracteristică a teoriei numerelor: simplitatea aparentă a enunțurilor problemelor, dintre care majoritatea sunt ușor de înțeles și, în același timp, profunzimea mare și, în multe cazuri, dificultatea enormă a soluției pentru problemele propuse, inclusiv demonstrarea coniecturilor, lucru ce a implicat necesitatea combinării conceptelor aparținând câmpurilor distincte și aparent neconectate.

Un exemplu potrivit pentru ceea ce tocmai a fost menționat este ultima teoremă a lui Fermat, una dintre cele mai faimoase probleme din toată matematica, coniectura care, ușor de înțeles pentru un elev de liceu, a fost demonstrată abia după 350 de ani, după ce Fermat a scris-o pe marginea unei traduceri a operei lui Diofant, în jurul anului 1642, până când Andrew Wiles și-a încheiat demonstrația în 1995, cu puțin înainte de sfârșitul secolului XX.

Probabil datorită caracteristicilor enumerate, multe dintre marile probleme ale teoriei numerelor i-au interesat și îi interesează pe toți cei care iubesc matematica, indiferent de noțiunile lor despre această știință. Și poate și din acest motiv, în multe jocuri numerice mici, este posibil să regăsim noțiuni matematice profunde.

De exemplu, să luăm în considerare anul publicării acestei cărți și a seriei sale, 2019. Puteți spune ceva interesant despre acest număr? Ei bine, da. Se pare că 2019 aparține submulțimii așa-numitelor numere „fericite”, a căror definiție și caracteristici le vom expune atunci când vorbim despre familiile de numere, împreună cu multe altele, cum ar fi cea a numerelor perfecte, semi-perfecte, abundente sau excesive, prietene, sociabile... Fiecare dintre aceste familii implică deseori coniecturi greu de demonstrat. De exemplu, știm că există infinite numere fericite și că există și o infinitate ce nu sunt, dar nu știm dacă există numere fericite infinite care sunt simultan prime. Acestea din urmă merită o mențiune separată, de fapt numerele prime sunt cea mai relevantă submulțime de numere întregi pozitive din matematică, atât de mult încât le vom dedica un capitol.